



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA FACTORIZACION DE POLINOMIOS



FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Polinomio Irreducible sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Definición. Un polinomio no constante $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ es irreducible (primo) sobre $\mathbb{K}$ si $p(x)$ no puede expresarse como la multiplicación de dos polinomios no constantes $f(x)$ y $g(x)$ sobre $\mathbb{K}$.

Teorema

1. Todo polinomio de primer grado, es irreducible sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
2. El polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible (primo) sobre $\mathbb{Q}$, si y solo si su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ no es el cuadrado de algún número racional.
3. El polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ es primo sobre $\mathbb{R}$, si su discriminante es negativo.
4. Todo polinomio de grado 3 siempre se puede factorizar sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo

1. Son polinomios primos en $\mathbb{R}[x]$:

i) $P(x) = \frac{2}{3}x + 5$

ii) $T(x) = \sqrt{3}x - 2$

iii) $M(x) = x^2 + 9$

iv) $S(x) = x^2 + x + 1$

2. $P(x) = x^2 + 2x - 1$ no es primo en $\mathbb{R}[x]$ ya que es posible factorizarlo empleando coeficientes reales a la forma $P(x) = (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$.

3. $H(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ no es primo en $\mathbb{R}[x]$ ya que es posible factorizarlo empleando coeficientes reales.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS SOBRE $\mathbb{K}$

Definición. Factorizar un polinomio $p(x)$ sobre $\mathbb{K}$, es expresarlo en la forma:

$$p(x) = f_1^{n_1}(x) \cdot f_2^{n_2}(x) \cdots f_k^{n_k}(x),$$

donde $n_i \in \mathbb{N}$, siendo $f_1(x), f_2(x) \dots, f_n(x)$ polinomios primos sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo

- a) $p(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 3)(x^2 - 3)$ se encuentra factorizado sobre $\mathbb{Q}$;
siendo sus factores primos: $x + 1, x - 1, x^2 + 3, x^2 - 3$
- b) $p(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ se encuentra factorizado
sobre $\mathbb{R}$; siendo sus factores primos: $x + 1, x - 1, x^2 + 3, x + \sqrt{3}, x - \sqrt{3}$
- c) $p(x) = (x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$; $i^2 = -1$, se halla
factorizado sobre $\mathbb{C}$; siendo sus factores primos:
 $x + 1, x - 1, x + \sqrt{3}i, x - \sqrt{3}i, x + \sqrt{3}, x - \sqrt{3}$

ALGUNOS CRITERIOS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

I. Por agrupación de términos

Se busca algún factor común (binomio, trinomio, etc.) mediante la agrupación de los términos del polinomio dado, por ejemplo de dos en dos, o de tres en tres, etc.

Ejemplo

Factorice sobre $\mathbb{Q}$, el polinomio $P(x; y; z) = yz^2 + 2xy + xyz + 2yz - xz - 2x - z^2 - 2z$

Resolución

$$P(x; y; z) = \underbrace{xyz + yz^2} + \underbrace{2xy + 2yz} - \underbrace{xz - z^2} - \underbrace{2x - 2z}$$

$$P(x; y; z) = yz(\underline{x + z}) + 2y(\underline{x + z}) - z(\underline{x + z}) - 2(\underline{x + z})$$

$$P(x; y; z) = (x + z)(\underbrace{yz + 2y}_{y(z + 2)} - \underbrace{z - 2}_{-(z + 2)})$$

$$P(x; y; z) = (x + z)[\underline{y(z + 2)} - \underline{(z + 2)}]$$

$$P(x; y; z) = (x + z)(z + 2)(y - 1)$$

Ejemplo

Factorice sobre $\mathbb{R}$, el polinomio

$$p(x; y; z) = xyz + cxy - abz - bcx - bxz + ayz + acy - abc$$

Resolución

$$p(x; y; z) = \underbrace{xyz + ayz}_{yz(x+a)} + \underbrace{cxy + acy}_{cy(x+a)} - \underbrace{abz - bxz}_{bz(x-a)} - \underbrace{bcx - abc}_{bc(x-a)}$$

$$p(x; y; z) = yz(x+a) + cy(x+a) - bz(x+a) - bc(x+a)$$

$$p(x; y; z) = (x+a) \underbrace{(yz + cy - bz - bc)}_{(y-b)(z+c)}$$

$$p(x; y; z) = (x+a)[y(z+c) - b(z+c)]$$

$$p(x; y; z) = (x+a)(y-b)(z+c)$$

Ejercicio

Factorice sobre $\mathbb{R}$, el polinomio $p(x; y; z) = 3y - 2xz - 2yz + 4z + 3x - 6$ e indique la suma de sus factores primos.

- A) $x + z$ B) $x + y - z + 1$ C) $x + y - z$ D) $x + y - 2z + 1$ E) $x + y - z + 2$

II. Por identidades

Se utilizan las identidades algebraicas (ver productos notables) para la descomposición en factores.

CASO 1: Diferencia de cuadrados.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

CASO 2: Trinomio cuadrado perfecto.

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

CASO 3: Suma o diferencia de cubos.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Ejemplo

Descomponer en factores primos sobre $\mathbb{Q}$, los polinomios

a) $p(x) = \underbrace{x^7 - 8x^4}_{(x^3 - 8)x^4} - \underbrace{16x^3 + 128}_{16(x^3 - 8)}$

Resolución

$$p(x) = x^4 \underbrace{(x^3 - 8)}_{(x-2)(x^2+2x+4)} - 16 \underbrace{(x^3 - 8)}_{(x-2)(x^2+2x+4)} = \underbrace{(x^3 - 8)}_{(x-2)(x^2+2x+4)} \underbrace{(x^4 - 16)}_{(x^2+4)(x+2)(x-2)}$$

$$p(x) = (x-2)(x^2+2x+4)(x^2+4)(x+2)(x-2)$$

$$p(x) = (x-2)^2(x^2+2x+4)(x^2+4)(x+2)$$

b) $p(x, y) = x^4 + y^4 - 7x^2y^2$

Resolución

$$p(x, y) = \underbrace{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{(x^2+y^2)^2} - \underbrace{9x^2y^2}_{(3xy)^2}$$

$$p(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (3xy)^2$$

$$p(x, y) = (x^2 + y^2 + 3xy)(x^2 + y^2 - 3xy)$$

c) $p(x; y) = x - x^3 + x^2y - y^3 + xy^2 + y$

Resolución

$$p(x; y) = x + y - \underbrace{(x^3 + y^3)} + \underbrace{x^2y + xy^2}$$

$$p(x; y) = \underbrace{(x + y)} - \underbrace{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} + \underbrace{xy(x + y)}$$

$$p(x; y) = (x + y)(1 - x^2 + xy - y^2 + xy)$$

$$p(x; y) = (x + y)[1 - \underbrace{(x^2 - 2xy + y^2)}]$$

$$p(x; y) = (x + y)\underbrace{[1 - (x - y)^2]}$$

$$p(x; y) = (x + y)(1 + x - y)(1 - x + y)$$

III. Por aspa simple

Es utilizado para factorizar trinomios de las formas:

$$ax^{2n} + bx^n + c, \quad ax^{2n} + bx^ny^m + cy^{2m}, \quad \text{donde } m, n \in \mathbb{N}.$$

Aquí se descomponen los términos extremos de tal modo que la suma de los productos en aspa sea igual al término central, de ser así, los factores se forman a partir de los términos ubicados en las dos líneas horizontales.

$$P(x; y) = ax^{2n} + bx^ny^m + cy^{2m}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 a_1x^n & & c_1y^m & \longrightarrow & a_2c_1x^ny^m \\
 & \nearrow & \searrow & & \\
 a_2x^n & & c_2y^m & \longrightarrow & a_1c_2x^ny^m \\
 & & & & \hline
 & & & & bx^ny^m
 \end{array}$$

$$P(x; y) = (a_1x^n + c_1y^m)(a_2x^n + c_2y^m)$$

Ejemplo Factorice sobre $\mathbb{Q}$ el polinomio

$$p(x; y) = 15x^4 - 8x^2y - 12y^2$$

$$\begin{array}{ccc} 3x^2 & & 2y \\ & \nearrow & \searrow \\ & & -6y \\ & \nwarrow & \nearrow \\ 5x^2 & & \end{array}$$

$$p(x; y) = (3x^2 + 2y)(5x^2 - 6y)$$

Ejemplo Factorice sobre $\mathbb{Q}$, el polinomio

$$p(x) = 12x^6 + 11x^3y^2 - 15y^4$$

Resolución

$$p(x; y) = 12x^6 + 11x^3y^2 - 15y^4$$

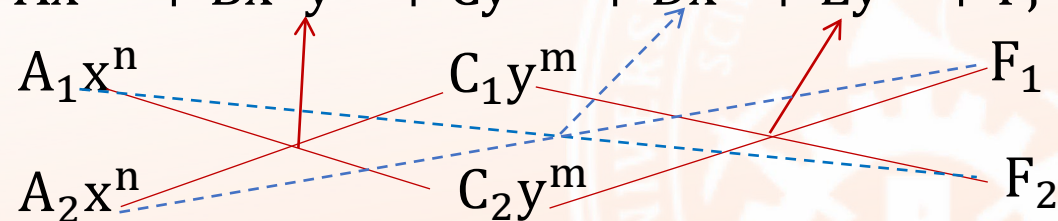
$$\begin{array}{ccc} 4x^3 & & -y^2 \\ & \nearrow & \searrow \\ & & 5y^2 \\ & \nwarrow & \nearrow \\ 3x^3 & & \end{array}$$

$$p(x) = (4x^3 - y^2)(3x^3 + 5y^2)$$

IV. Por aspa doble

- Ordenar y completar el polinomio en su forma estándar .
Luego, se deben realizar tres aspadas simples:
- Con el primer, segundo y tercer término.
- Con el tercer, quinto y sexto término.
- Con el primer, cuarto y sexto término.
- Una vez comprobado los pasos anteriores, sus factores se forman a partir de los términos de las dos líneas horizontales.

$$P(x; y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F, \text{ donde } m, n \in \mathbb{N}.$$



$$P(x; y) = (A_1x^n + C_1y^m + F_1)(A_2x^n + C_2y^m + F_2)$$

Ejemplo

Factorice sobre $\mathbb{R}$, el siguiente polinomio

$$p(x; y) = 20x^2 + 22xy + 6y^2 - 33x - 17y + 7$$

Resolución

$$p(x; y) = 20x^2 + 22xy + 6y^2 - 33x - 17y + 7$$

$$p(x; y) = (5x + 3y - 7)(4x + 2y - 1)$$

Ejemplo

Descomponer en factores primos sobre $\mathbb{Q}$, el polinomio
 $p(x; y) = 18x^2 - 5xy - 2y^2 + 30x + 11y - 12$

Resolución

$$p(x; y) = 18x^2 - 5xy - 2y^2 + 30x + 11y - 12$$

$$p(x; y) = (9x + 2y - 3)(2x - y + 4)$$

Ejercicio

Halle la suma de los factores primos sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio

$$p(x; y) = 12x^2 + xy - 20y^2 - 11x + 37y - 15$$

- A) $7x - y - 2$ B) $5x - y - 2$ C) $7x - y + 3$ D) $x - 7y - 2$ E) $5x - y - 2$

V. Por aspa doble especial

- Ordenar y completar el polinomio en forma decreciente.
- Realizar un aspa simple entre el 1er y 5to término para obtener un término de la forma px^{2n} .
- Hallar $qx^{2n} = Cx^{2n} - px^{2n}$
- Efectuar las dos aspás simples según el método de aspa doble.
- Una vez comprobado los pasos anteriores, sus factores se forman a partir de los términos de las dos líneas horizontales.

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E, \text{ donde } n \in \mathbb{N}$$

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + qx^{2n} + px^{2n} + Dx^n + E$$

$$\begin{array}{ccccc} A_1x^{2n} & & q_1x^n & & E_1 \\ A_2x^{2n} & & q_2x^n & & E_2 \end{array}$$

$$P(x) = (A_1x^{2n} + q_1x^n + E_1)(A_2x^{2n} + q_2x^n + E_2)$$

Ejemplo

Determine la suma de todos los factores primos (sobre $\mathbb{R}$) del siguiente polinomio :

$$p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 26x - 8$$

Resolución

$$p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 10x^2 + 26x - 8$$

$$p(x) = (3x^2 + 5x - 2)(x^2 - 3x + 4)$$

$$p(x) = (3x - 1)(x + 2)(x^2 - 3x + 4)$$

Suma de factores primos: $2x^2 + x + 5$

Ejercicio

Determine la suma de los factores primos sobre $\mathbb{R}$, del polinomio :
 $p(x) = 10x^4 - 11x^3 + 29x^2 - 16x - 12$

- A) $2x^2 - x - 7$ B) $2x^2 + 5x + 7$ C) $2x^2 + 5x + 8$
D) $2x^2 - 3x - 2$ E) $2x^2 + 7$

Ejercicio

Determine la suma de los factores primos sobre $\mathbb{R}$, del siguiente polinomio :

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 19x^2 - 18x + 9$$

VI. Por divisiones sucesivas (divisores binomios)

Es utilizado para factorizar polinomios $p(x)$ con coeficientes enteros, cuyo grado sea mayor o igual que tres, así

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 3.$$
$$a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0 \in \mathbb{Z}$$

Se basa en el Teorema del Factor o Divisor.

$p(\alpha) = 0 \iff (x - \alpha)$ es un factor o divisor del polinomio $p(x)$.

El valor racional α se denomina raíz o cero del polinomio $p(x)$.

Teorema

Sea $\alpha = \frac{r}{s}$ una fracción irreducible, si es una raíz de $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $r|a_0 \wedge s|a_n$. ($r, s \in \mathbb{Z}$).

Ejemplo

Halle la suma de las raíces racionales del polinomio

$$p(x) = 2x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 32x^2 + 5x + 6.$$

Resolución

Divisores de 2: $\pm\{1; 2\}$ Divisores de 6: $\pm\{1; 2; 3\}$

Posibles raíces racionales: $\pm\left\{1; 2; 3; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

	2	7	-8	-32	5	6
2		4	22	28	-8	-6
	2	11	14	-4	-3	0
-3		-6	-15	3	3	
	2	5	-1	-1	0	
1/2		1	3	1		
	2	6	2	0		

$$p(x) = (x - 2)(x + 3)(2x - 1)(x^2 + 3x + 1)$$

Raíces racionales: 2, -3 y $\frac{1}{2}$

Suma de raíces racionales: $-\frac{1}{2}$

Ejercicio

Sea $p(x)$ el polinomio definido por $p(x) = 6x^5 + 31x^4 + 67x^3 + 73x^2 + 21x - 18$. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $p(x)$ tiene 5 factores primos sobre $\mathbb{Q}$.

II) $p(x)$ tiene 4 factores primos sobre $\mathbb{R}$.

III) $p(x)$ presenta un factor cuadrático primo sobre $\mathbb{R}$.

A) VVV

B) FVV

C) FVF

D) VFF

E) VVF